

Feuille I. Rappels élémentaires sur les ensembles et le calcul algébrique

Exercices d'application du cours

Exercice I.1

Peut-on écrire :

- a. $a \in E$?
- b. $a \subset E$?
- c. $\{a\} \subset E$?
- d. $\emptyset \in E$?
- e. $\emptyset \subset E$?

Exercice I.2

On pose $A = [3; 12[$, $B = [1; 8]$ et $C = [6; +\infty[$. Calculer les intervalles suivants :

- a. $A \cap B$
- b. $A \cup B \cup C$
- c. $(A \cap C) \cup B$

Exercice I.3

Calculer et simplifier les fractions suivantes sous forme irréductible.

- a. $A = \frac{21}{15}$
- b. $B = \frac{42}{14}$
- c. $C = \frac{24}{144}$
- d. $D = \frac{105}{49}$
- e. $E = \frac{7}{6} - \frac{1}{15}$
- f. $F = \frac{5}{6} + \frac{1}{15}$
- g. $G = \frac{3}{14} - \frac{2}{28}$

$$\text{h. } H = \frac{5}{18} + \frac{1}{24}$$

$$\text{i. } I = \frac{\frac{8}{21}}{4}$$

$$\text{j. } J = \frac{\frac{4}{3} - 5}{\frac{3}{4}}$$

$$\text{k. } K = \frac{2 + \frac{5}{4}}{\frac{5}{2} - \frac{5}{4}}$$

$$\text{l. } L = \frac{7}{3} \times \left(2 + \frac{1}{7}\right)$$

Exercice I.4

Écrire les nombres suivants sous la forme $5^n \times 2^p$ avec $n, p \in \mathbb{Z}$.

- a. $A = (5^2 \times 10^3)^3$
- b. $B = \frac{2^{-3} \times 25}{(5^2)^3 \times 2^{-1}}$
- c. $C = \frac{25}{8}$.

Exercice I.5

Simplifier au maximum les expressions suivantes.

- a. $A = \frac{15^3}{3^2 \times 5^9}$
- b. $B = \frac{24 \times 10^{-7}}{3 \times 10^{-5}}$
- c. $C = 8 \times (7 \times 5)^5 \times \frac{5^2 \times 7^3}{7^4 \times 5^5} \times (7^{-2})^2$
- d. $D = \frac{21 \times 10^9 \times 25 \times 10^7}{1200 \times (10^{-3})^2}$
- e. $E = (-2)^3 \times 5 + 3^2 \times (-5) \times 2^2$

$$f. F = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^3$$

Exercice 1.6

Simplifier au maximum les expressions suivantes.

a. $A = (\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)$

b. $B = \sqrt{\frac{16}{25}}$

c. $C = \sqrt{6}\sqrt{5}\sqrt{18}\sqrt{15}$

d. $D = (3\sqrt{5} - 5)^2$

e. $E = (1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})$

f. $F = 2\sqrt{14}\sqrt{7} - \sqrt{8}$

Exercice 1.7

Écrire les fractions suivantes sans racine carrée au dénominateur.

a. $A = \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$

b. $B = \frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{3}}$

c. $C = \frac{7}{2 - \sqrt{13}}$

d. $D = \frac{1 + \sqrt{4}}{2\sqrt{4}}$

e. $E = \frac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{3} + 2}$

Exercice 1.8

Développer et simplifier au maximum les expressions suivantes.

a. $A = (2x^2 + 2x + 3)(x + 1)$

b. $B = (-2 + x)^2$

c. $C = (-x + 1)^2$

d. $D = (3x + 1)^2 - (x + 2)^2$

e. $E = (x + 3)^2$

f. $F = (1 + x)^2 + (1 - x)(1 + x)$

g. $G = (x - 2)^2 + (x + 2)^2$

h. $H = (2x + 1)^2 - (3x - 2)^2$

Exercice 1.9

Factoriser au maximum les expressions suivantes.

a. $A = (x + 2)(3x^2 + 1) - (x + 1)(x + 2)$

b. $B = x^2 - 16 + 3(x - 4)$

c. $C = (x - 1)^2 - (x - 1)(x + 3)$

d. $D = (2x + 1)^2 - (3x - 2)^2$

e. $E = (2x + 1)(x^2 + 2) - (2x + 1)^2$

Exercice 1.10

Sachant que $-1 \leq x \leq 4$ et $5 \leq y \leq 7$, déterminer si possible un encadrement de $\frac{1}{2x + 4}$ et de $\frac{y - x}{y + x}$.

Exercice 1.11

Sachant que $1 \leq x \leq 3$ et $2 \leq y \leq 3$, déterminer un encadrement des quantités suivantes.

a. $2x + 1$

b. $y + 5$

c. $(2x + 1)(y + 5)$

d. $\frac{2x + 1}{y + 5}$

Exercice 1.12

Résoudre les (in)équations suivantes :

a. $-2x + 1 = 0$

b. $-6x + 7 = 8x - 2$

c. $3x - 7 = 5(x + 2) + 8$

d. $2x + 1 > 0$

e. $-6x + 3 < 0$

f. $4x + 2 \leq 5x + 3$

Exercice 1.13

Résoudre les équations suivantes.

a. $x^2 - 3 = 0$

b. $x^2 + 6 = 0$

c. $x^2 + 6 = 0$

d. $(x - 2)^2 = -5^2$

e. $(x - 2)^2 = (-5)^2$

Exercice I.14

À chaque fois résoudre l'équation et factoriser si possible le trinôme associé.

- $x^2 + 5x + 6 = 0$
- $x^2 + x + 1 = 0$
- $-2x^2 + 3x + 1 = 0$

Exercice I.15

Résoudre l'équation $x^2 - 9 + 3(x - 3) = 0$

- ...en commençant par développer.
- ...en commençant par factoriser.

Exercice I.16

Résoudre les équations suivantes.

- $(2x + 1)(x + 7)(3 - x) = 0$
- $2x(x + 1)^2 = (1 - 3x)(x + 1)^2$
- $\sqrt{x(x + 1)} = 1$
- $(-x + 3)(-2x^2 + 18x)(-x^2 + x + 12) = 0$

Exercice I.17

Résoudre les inéquations suivantes.

- $(2x + 1)(x + 7)(3 - x) \geq 0$
- $2x(x + 1)^2 < (1 - 3x)(x + 1)^2$
- $\sqrt{x(x + 1)} < 1$
- $(-x + 3)(-2x^2 + 18x)(-x^2 + x + 12) \leq 0$

Exercice I.18

Résoudre les équations suivantes.

- $\frac{x - 4}{x + 4} = 0$
- $\frac{x + 2}{x + 1} + 4 = \frac{5x}{x + 2}$
- $\frac{7x - 5}{x^2 + 2x + 1} = 1$

Exercice I.19

Résoudre les équations suivantes :

- $\sqrt{x - 1} = 3$
- $\sqrt{x^2 + 3} = 2x$
- $\sqrt{x - 4} = 2$
- $\sqrt{6x + 82} - 3x = 1$

Exercices d'approfondissement**Exercice I.20 - ***

Calculer les fractions suivantes sous forme irréductible.

- $A = \frac{3}{12} + \frac{2}{16}$
- $B = \left(\frac{7}{5} - \frac{2}{4}\right) - \left(\frac{21}{15} - 1 + \frac{2}{3}\right)$
- $C = \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$
- $D = \frac{\frac{1}{9} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{18} - \frac{1}{27}}$
- $E = -\frac{2}{n^2} + \frac{7}{4n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$
- $F = \frac{2x + 1}{x - 3} - \frac{x - 2}{x + 2}$, où $x \in \mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$

Exercice I.21 - *

Écrire sous la forme $2^p \times 3^q$, avec $p, q \in \mathbb{Z}$ les expressions suivantes.

- $A = 4^3$
- $B = 6^5$
- $C = 16$
- $D = \frac{3}{2}$
- $E = \frac{9}{2}$
- $F = \frac{3^2 \times 2^n}{4 \times 3^n}$
- $G = \left(\frac{3}{2}\right)^3$
- $H = \left(\frac{2^n}{3}\right)^2$

Exercice I.22 - *

Simplifier au maximum les expressions suivantes.

- $A = 8 \times (7 \times 5)^5 \times \frac{5^2 \times 7^3}{7^4 \times 5^5} \times (7^{-2})^2$
- $B = 8^{n+1} - 4^n \times 2^{n+2}$

Exercice 1.23 - **

1) Calculer les quantités suivantes.

- a. $A = (-1)^0$
- b. $B = (-1)^1$
- c. $C = (-1)^{-1}$
- d. $D = (-1)^2$
- e. $E = (-1)^{-2}$
- f. $F = (-1)^3$
- g. $G = (-1)^4$

2) Soit $n \in \mathbb{Z}$, combien vaut $(-1)^n$ en général ?

3) Soit $n \in \mathbb{Z}$. Calculer les quantités suivantes.

- a. $H = (-1)^{2n}$
- b. $I = (-1)^{2n+1}$
- c. $J = (-1)^{n-1} + (-1)^n + (-1)^{n+2}$
- d. $K = (-1)^{n-1} \times (-1)^n \times (-1)^{n+2}$

Exercice 1.24 - **

Encadrer $\sqrt{26}$ entre deux entiers positifs et en déduire le signe de $5 - \sqrt{26}$ et de $7 + \sqrt{26}$.

Exercice 1.25 - *

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Simplifier chacune de ces expressions sous la forme proposée :

a. $A + 4\sqrt{24} - 5\sqrt{96} + 4\sqrt{54}$,

sous la forme $A = n\sqrt{2}\sqrt{3}$ avec $n \in \mathbb{Z}$

b. $B = \frac{(x^3)^5 \times x^2}{x^2 \times x^{-5}}$,

sous la forme $B = x^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$

c. $C = \frac{(x\sqrt{x})^4}{(x^3 \times x)^2}$

sous la forme $C = x^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$

d. $D = \frac{((3x)^2 + 9)(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^3}$

sous la forme $D = N(x^2 + 1)^n$ avec $N, n \in \mathbb{Z}$

Exercice 1.26 - *

1) Développer au maximum les expressions suivantes.

a. $A = (x^3 + x^2 + x + 1)(x^2 + 2x + 1)$

b. $B = (-x + 3)^2 - (x + 2)^2$

c. $C = (2x - 1)^3$

2) Factoriser au maximum les expressions suivantes.

a. $A = (x - 1)(4x + 3x^2) - (x^2 + 1)(x - 1)$

b. $B = (2x - 1)^3 - (2x - 1)$

c. $C = 16 - x^2 + 3(x - 4)$

Exercice 1.27 - *

Sachant que $2 \leq x \leq 3$, déterminer si possible un encadrement des quantités suivantes.

a. $7x + 3$

b. $-x + 1$

c. $\frac{x + 1}{x - 1}$

d. x^2

e. $3 - x^2$

Exercice 1.28 - **

Sachant que $-1 \leq x \leq 3$ et $1 \leq y \leq 3$, déterminer si possible un encadrement des quantités suivantes.

a. $x + 2$

b. $2y + 1$

c. $(x + 2)(2y + 1)$

d. $(x + 2) - (2y + 1)$

Exercice 1.29 - **

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes.

a. $3(x - 3) = 5\left(\frac{x}{2} - \frac{4}{3}\right)$

b. $2x^2 + 4x + 2 = 0$

c. $(x - 1)^2 = -7^2$

d. $(x - 9)^2 = (-3)^2$

e. $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{49}{4}$

f. $(2x + 3)(3x + 5)(7 - x^2) = 0$

g. $2x(x + 1)^2 = (1 - 3x)(x + 1)^2$

h. $(x^2 - 1)^2 = (x + 1)^2$

i. $\frac{2x-1}{x^2+1} = 2$

Exercice I.30 - ***

Résoudre sur l'équation $mx^2 - 2mx + 2 = 0$ suivant les valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$.

Exercice I.31 - ***

- 1) Résoudre sur l'équation $X^2 + X - 6 = 0$.
- 2) En déduire la résolution sur \mathbb{R} de l'équation $x^4 + x^2 - 6 = 0$.

Exercice I.32 - *

- 1) Donner le signe de $-x^2 + 3x - 2$ en fonction de x .
- 2) Résoudre $-x^2 + 4x - 5 < 0$ sur \mathbb{R} .
- 3) Résoudre $x^4 - x^2 - 2 = 0$ sur \mathbb{R} .
- 4) Résoudre $x^4 - x^2 - 2 \leq 0$ sur \mathbb{R} .

Exercice I.33 - **

Résoudre les inéquations suivantes sur \mathbb{R} .

- a. $2x + 6 > 4(x + 1)$
- b. $2x^2 - 3x + 2 < 0$
- c. $4x^2 + 4x + 1 \geq 0$
- d. $-x^2 - 3x + 9 > 0$
- e. $(2x + 1)(x + 7)(x - 3) \geq 0$
- f. $2x(x + 1)^2 < (1 - 3x)(x + 1)^2$
- g. $x^3 + 3x \leq 3x^2 + 1$
- h. $\frac{(x-1)^2(x+1)}{x+4} \geq 0$
- i. $\frac{x+2}{x^2-1} \geq \frac{3}{x-1}$
- j. $\frac{x-3}{x+2} + 4 < \frac{5x}{x+2}$
- k. $\frac{x-1}{2} + \frac{x}{3} < \frac{2x-6}{2}$
- l. $(x-2)^2 < 4$

Exercice I.34 - **

Résoudre les (in)équations suivantes sur \mathbb{R} .

- a. $\sqrt{x-4} = 2$
- b. $\sqrt{x^2+9} > 5$
- c. $\sqrt{x^2+3x+1} = 2x = 1$
- d. $\sqrt{x+3} + \sqrt{2-x} = \sqrt{7}$

Exercice I.35 - ****

Montrer que si x_1 et x_2 sont deux racines du trinôme $ax^2 + bx + c$, alors $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.